CONCOURS INTERNE PLP2 SESSION DE 1988 Section : SCIENCES

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures Option : MATHÉMATIQUES - SCIENCES PHYSIQUES

L'épreuve comporte deux problèmes. Il est conseillé aux candidats de consacrer approximativement la même durée à chacun de ces deux problèmes. Le premier problème fait intervenir des notions étudiées par les élèves des lycées professionnels à leurs différents niveaux. Le deuxième problème propose des calculs d'intégrales généralisées intervenant dans l'étude d'une loi statistique utilisée en sciences et en mathématiques.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et, dans le premier problème, l'exposé des méthodes en conformité avec les programmes en vigueur et l'habileté pédagogique interviendront pour une large part dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul, notamment des calculatrices de poche, est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986).

PREMIER PROBLÈME

Ce premier problème est à traiter au niveau des élèves. Son thème provient de l'exercice suivant extrait d'un manuel : « Deux points B et C étant donnés dans le plan, distants de cinq centimètres, construire un point M du plan tel que $MB = \frac{2}{3} MC$. »

I

1° Cet exercice suggère à un professeur diverses activités à réaliser dans sa classe. Les questions suivantes *a* et *b* proposent de telles activités. On demande au candidat d'en faire une présentation pédagogique.

a. Décrire et discuter une construction géométrique d'un point M vérifiant la propriété considérée.

b. Après la construction d'un nombre « assez grand » de points M vérifiant la propriété, faire émettre des conjectures sur les configurations obtenues à partir de certains de ces points ainsi que sur la nature de l'ensemble constitué par ces points.

2° Soient deux points B et C distincts dans le plan et un point M de ce plan non situé sur la droite BC. La bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$ coupe le segment BC au point I.

Au niveau d'une classe qui vient de s'approprier le théorème de Thalès, prouver, en effectuant les rappels jugés indispensables, que

$$\frac{MB}{MC} = -\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}.$$

Rédiger un exercice permettant, de façon analogue à ce qui précède, d'introduire le point E de la droite BC tel que

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{MB}{MC}.$$

Comment faire utiliser aux élèves ces deux points I et E dans le but de leur faire découvrir la nature de l'ensemble des points M du plan vérifiant $MB = \frac{2}{3} MC$?

3° Les points B et C étant donnés distincts, on se propose de déterminer rigoureusement, avec des élèves du baccalauréat professionnel, l'ensemble des points M du plan tels que

$$MB = \frac{2}{3} MC.$$

En choisissant, au préalable, un repère orthonormé qui permette une écriture et une interprétation mathématiques simples de cette égalité, résoudre analytiquement le problème.

II

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé direct. À tout point M de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z = x + iy$ $(i^2 = -1)$ et on note b et c les affixes des deux points B et C supposés distincts. On désigne par $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB})$ une des mesures de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MB}$ pris dans cet ordre, mesure exprimée en radians, modulo 2π.

Tournez la page S. V. P.

1° Soit k un réel strictement positif et α un réel quelconque. Prouver, en vous appuyant sur l'interprétation géométrique des nombres complexes et sur les propriétés du quotient de deux nombres, l'équivalence des deux propositions suivantes concernant le point M d'affixe z dans le plan :

(P_1) $\dfrac{MB}{MC} = k$ et $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (P_2) $\dfrac{z-b}{z-c} = k e^{i\alpha}$.

2° Soient $b = 0$ et $c = 5$. Déduire de ce qui précède, les coordonnées du point M vérifiant :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3}.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Étant donnés un réel a strictement positif et un entier naturel n, on envisage l'application f_n de R vers R définie par :

$$f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

I

On choisit $a = 1$.

1° Étudier les variations des fonctions f_0, f_1, f_2 et calculer les limites de ces fonctions lorsque la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

2° Le repère étant orthonormé et l'unité graphique étant 5 cm, dessiner les courbes représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2. On précisera les points de ces courbes d'abscisses 0, 1, $\sqrt{2}$ et on tracera les tangentes à ces courbes en ces trois points.

II

On admet, dans ce qui suit, que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ est convergente et que sa valeur numérique est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On se propose de montrer l'existence des intégrales : $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$

et d'en faire le calcul.

1° Montrer l'existence de $I_0 = \int_0^{+\infty} f_0(x)\,dx$ et prouver que $I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2° Calculer, à l'aide de a et du réel X, l'intégrale : $J_1(X) = \int_0^X f_1(t)\,dt$.

En déduire l'existence de I_1 et sa valeur en fonction de a.

3° Soit n un entier $\geqslant 2$.

a. On pose : $J_n(X) = \int_0^X f_n(t)\,dt$.

Trouver une relation entre $J_n(X)$, $J_{n-2}(X)$, a, n et X.

b. En déduire que si I_{n-2} existe, alors I_n existe et, dans ce cas, trouver une relation entre I_n, I_{n-2}, a et n.

c. Conclure à l'existence de I_n pour toutes les valeurs de l'entier naturel n.

a. Calculer I_2 et I_3 en fonction de a.

b. Calculer I_{2p} et I_{2p+1} (p étant un entier naturel) en fonction de a et de p.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail